Technische Universität Berlin **Wintersemester 2018/2019**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

2. Übungsblatt: Normen, Konditionszahl, LR-Zerlegung

Hausaufgaben: (Abgabe <u>vor</u> der Vorlesung am 7. November 2018)

Aufgabe 1: **(1 Punkte)**

Gilt für jede Norm $||\cdot||$, dass $||v+w|| \geq |||v|| - ||w|||$?

Aufgabe 2: **(4 Punkte)**

Die relative Kondition einer Funktion f am Punkt x ist definiert als

$$\frac{||f'(x)|| \cdot ||x||}{||f(x)||} \tag{1}$$

Zeige nun, dass für eine invertierbare lineare Funktion $f : x \to Ax$ die maximale (über alle $x \neq 0$) relative Kondition gegeben ist durch

$$||A|| \cdot ||A^{-1}|| \tag{2}$$

wobei

$$||A|| := \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \tag{3}$$

Dies nennen wir auch die Kondition $\kappa(A)$ der Matrix A.

Wir können zum Beispiel von den Matrizen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ die Kondition analytisch bestimmen (ist hier nicht Teil der Aufgabe) und dann 'a posteriori', d.h. in Abhängigkeit der berechneten Näherungslösung den Fehler der Lösung des Systems $Ax = b$ abschätzen.

Das heißt konkret folgendes: Wir haben die Matrix A, die rechte Seite b und eine Näherungslösung $\hat{x}$ gegeben. Diese Näherungslösung kann, für das was folgt, sogar völlig geraten sein. Wir können nun eine obere Schranke für den relativen Fehler dieser Näherungslösung angeben. Man sagt dazu auch, dass wir den Fehler (nach oben) abschätzen. Die Abschätzung lautet

$$\frac{||x - \hat{x}||}{||x||} \leq \kappa(A) \cdot \frac{||b - A\hat{x}||}{||b||}. \tag{4}$$

Auf der rechten Seite stehen nur Dinge, die leicht berechnet werden können und die Kondition, die oft bekannt ist. Auf der linken Seite steht der relative Fehler.

Ungleichung (4) soll gezeigt werden, die Kondition der Matrix A muss nicht berechnet werden. Als Beispiel sei nun $\hat{x} = 2$ und die rechte Seite von (4) sei $\frac{1}{2}$. In welchem Intervall kann x liegen?

Aufgabe 3: **(2 Punkte)**

Gilt die folgende Gleichung, wobei die I_i Einheitsmatrizen sind und B ebenfalls eine Matrix ist?

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ B & I_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ -B & I_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Gilt die folgende Gleichung?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ -y & -z & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Gilt für eine Permutationsmatrix P immer $P = P^{-1}$? (Achtung: Nicht jede Permutation ist auch eine Transposition.)

Aufgabe 4: **(3 Punkte)**

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 9 & 9 \\ 6 & 12 & 21 & 22 \\ 8 & 16 & 36 & 44 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} 23 \\ 124 \\ 61 \\ 196 \end{bmatrix}$.

1. Bestimmen Sie per Hand die LR-Zerlegung von A ohne Pivotisierung.
2. Bestimmen Sie per Hand die LR-Zerlegung $LR = PA$ von A mit Spaltenpivotisierung sowie die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

Nehmen Sie diese Aufgabe ernst. Sie wird Ihnen beim Verständnis helfen.

Programmieraufgabe 2: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 22. November 2017)

Schreiben Sie ein Programm `gauss_plr` das die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berechnet: $LR = PA$. Die Permutationsmatrix soll dabei in einem Vektor geeignet abgespeichert werden. Der Aufruf soll mit

```
[LR,piv]=gauss_plr(A)
```

erfolgen, wobei die Ausgabe `LR` eine Matrix der Größe $n \times n$ ist, in deren unterem Dreieck L und in deren oberem Dreieck R abgespeichert ist. `piv` soll ein Vektor der Länge n sein, der die Pivotisierung P beschreibt.
Schreiben Sie Programme `vorwaerts` und `rueckwaerts` die ausgehend von der berechneten LR-Zerlegung die Gleichungssysteme $Lz = Pb$ und $Rx = z$ lösen:

```
z=vorwaerts(LR,piv,b), x=rueckwaerts(LR,piv,z)
```

Schreiben Sie ein Programm

```
x=gauss(A,b)
```

welches die obigen Programme kombiniert um $Ax = b$ zu lösen. Testen Sie ihr Programm an dem System aus Aufgabe 4. Geben Sie Zwischenschritte des Algorithmus aus und verleichen Sie sowohl die Zwischenschritte als auch die Lösung mit ihrer schriftlichen Lösung. Untersuchen Sie experimentell die asymptotische Laufzeit Ihres Algorithmus' und vergleichen Sie diese mit der Octave/Matlab-Routine `A\b` . Hinweis: `rand, tic, toc` . Mehr Tipps zur Laufzeitbestimmung und dem Anzeigen von Graphen gibt es in der Übung.