Technische Universität Berlin **Wintersemester 2018/2019**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

3. Übungsblatt: Projektion

Hausaufgaben: (Abgabe <u>vor</u> der Vorlesung am 14. November 2018)

Aufgabe 1: **(1 Punkte)**
Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Zeige, dass durch $||x||_Q :=< x, Qx >^{\frac{1}{2}}$ eine Norm definiert ist, wobei $< \cdot, \cdot >$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ sei.

Aufgabe 2: **(1+1+2+2 Punkte)**

Die Orthogonale Projektion y^* von $x \in \mathbb{R}^n$ auf den Untervektorraum W ist durch die folgenden zwei Eigenschaften definiert:

$$y^* \in W$$

und

$$\langle y^* - x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in W.$$

1. Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion eindeutig ist.
2. Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion existiert.
3. Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion linear ist.
4. Zeigen Sie, dass $A(A^TA)^{-1}A^Tx$ die orthogonale Projektion von x auf den von den Spalten von A aufgespannten Untervektorraum ist.

Aufgabe 3: **(3 Punkte)**

Sei $n \geq m$. Es habe $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ vollen Rang und die Spalten von A spannen $W \subset \mathbb{R}^n$ auf. Geben Sie eine allgemeine Formel (ähnlich wie in Aufgabe 2.3) für die orthogonale Projektion auf W an, wobei das Skalarprodukt durch $\langle x, y\rangle := x^TSy$ definiert sei. S sei hierbei eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen auf der Diagonalen.