Technische Universität Berlin **Wintersemester 2018/2019**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

4. Übungsblatt: Cholesky, LDL, Spiegelung, LR

Hausaufgaben: (Abgabe <u>vor</u> der Vorlesung am 21. November 2018)

Aufgabe 1: **(2 Punkte)**
Berechnen Sie die Cholseky-Zerlegung $LL^T = A$ wobei L eine untere Dreiecksmatrix ist und die LDL-Zerlegung $\hat{L}D\hat{L}^T = A$ wobei D eine Diagonalmatrix und $\hat{L}$ eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 14 \\ 3 & 14 & 44 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: **(2 Punkte)**
Es sei $n \geq m$ und A eine reelle $n \times m$-Matrix von vollem Rang. Zeigen Sie, dass $A^T A$ vollen Rang hat und dass AA^T nicht vollen Rang haben muss.

Aufgabe 3: **(1 Punkte)**

Geben Sie eine Matrix A von vollem Rang an, für die keine (auch keine komplexwertige) Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$ existiert.

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**
(Householder in $\mathbb{C}$) Definiere $x^* := \bar{x}^T$ für Vektoren und Matrizen x. Definiere außerdem

$$\langle a, b \rangle := a^* b \text{ und}$$

$$||a|| := \sqrt{\langle a, a \rangle}.$$

Zeige, dass für die Householdermatrix

$$H := I - 2\frac{nn^*}{n^*n}$$

folgende drei Gleichungen gelten:

$$HH = I,$$

$$H^* = H \text{ und}$$

$$||Hv|| = ||v||$$

Es sei v ein Vektor, der durch H auf ein komplexes vielfaches von e_1 abgebildet werden soll. Es soll also

$$Hv = re^{i\theta}e_1$$

gelten. Wie muss $r \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit

$$||re^{i\theta}e_1|| = ||v||?$$

Finden Sie außerdem n und θ, so dass

$$Hv = re^{i\theta}e_1$$

gilt.

Programmieraufgabe 1: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 7. Dezember 2018, Terminbestellung bis 23. November)

Schreibe ein Programm `qrzerlegung`, das die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m} (n \geq m)$ mit $\text{rang}(A) = m$ mit Hilfe von Householdermatrizen berechnet wobei $Q = \prod_{i=1}^{m} H(v^{(i)})$, $H(v) = I - 2vv^T$ und $||v^{(i)}||_2 = 1$ für alle $i = 1, ..., m$. Der Aufruf soll mit

```
[QR,d]=qrzerlegung(A)
```

erfolgen. Die Eingabe ist:

`A` - eine $n \times m$ Matrix.

Die Rückgabe ist:

QR - eine Matrix der Größe $n \times m$. Dabei stehen im oberen Dreieck von `QR` die oberen Einträge von R. In der Spalte $i = 1, ..., m$ stehen jeweils in den Zeilen $i + 1, ..., n$ die entsprechenden Einträge des Vektors $v^{(i)}$.

`d` - ein Vektor der Größe m, der die Einträge $v_i^{(i)}$, $i = 1, ..., m$ enthält.

Es sollen keine zusätzlichen Matrizen im Algorithmus erzeugt werden, sondern die Einträge von `QR` gleich in `A` abgespeichert werden.

Schreibe ein Programm `qtmult`, das die Anwendung von Q^T auf einen Vektor b, d.h. $y = Q^T b$, implementiert. Dabei soll Q in Form von Householdervektoren abgespeichert sein. Der Aufruf soll mit

```
y = qtmult(QR,d,b)
```

erfolgen. Die Eingaben `QR` und `d` stammen hierbei aus dem Programm `qrzerlegung`. Die Berechnung von $Q^T b$ soll einen Aufwand von $\mathcal{O}(nm)$ nicht übersteigen.

Schreibe ein Programm `ausgleich` das mit Hilfe der Programme `qrzerlegung` und `qtmult` das Ausgleichsproblem $||Ax - b||_2 = min$ löst. Der Aufruf soll mit

```
x = Ausgleich(A,b)
```

erfolgen. Die Eingabe ist:

`A` - Matrix A der Größe $n \times m$

`b` - Vektor b der Länge n.

Die Rückgabe ist:

`x` - Vektor x der Länge m.

Bemerkung: Es ist sinnvoll, z.B. für die Multiplikation mit einer einzelnen Householdermatrix $H(v)$, ein eigenes Unterprogramm zu schreiben, wobei dieses Unterprogramm in $O(n)$ laufen soll. Außerdem soll das Programm `rueckwaerts` verwendet werden.