Technische Universität Berlin **Wintersemester 2018/2019**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

5. Übungsblatt

Hausaufgaben: (Abgabe <u>vor</u> der Vorlesung am 28. November 2018)

Aufgabe 1: **(2 Punkte)**
Die Hyperebene M enthalte den Nullvektor und habe einen Normalenvektor v mit $||v|| = 1$. Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion von p auf M durch $p- < v, p > v$ gegeben ist.

Aufgabe 2: **(4 Punkte)**
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \alpha_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

wobei A eine LR-Zerlegung mit Faktoren der angegebenen Form besitzt.

(a) Bestimme die Rekursionsformeln für $(\alpha_i)_{i=2,\dots,n}$, $(\beta_i)_{i=1,\dots,n}$ und $(\gamma_i)_{i=1,\dots,n-1}$ der Zerlegung $A = LR$. Gib die Anzahl der Gleitkommaoperationen an, die für die Berechnung der LR-Zerlegung benötigt werden.

(b) Bestimme Rekursionsformeln für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe der berechneten LR-Zerlegung. Gib die Anzahl der Gleitkommaoperationen an, die für die Lösung notwendig sind.

Aufgabe 3: **(1 Punkte)**
Die Bestimmung von Nullstellen eines Polynoms ist ein klassisches Problem der Numerischen Mathematik. Leider eines mit schlechter Kondition, was wir am Beispiel von Polynomen von Grad 1 überprüfen wollen. Sei also f die Lösungsfunktion, die zu gegebenem $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ die Nullstelle des Polynoms

$$x \mapsto a + bx$$

berechnet. Bestimmen Sie die absolute und relative Kondition des Problems an der Stelle (a, b).
Wie muss ich a und b wählen, damit die relative Kondition möglichst groß wird?

Aufgabe 4: **(3 Punkte)**
Nehmen wir an, wir wollen das Gleichungssystem $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $b \in \mathbb{R}^n$ mittels der LR-Zerlegung mit Pivotisierung lösen. Wenn wir dies mit einem Computer machen, so erhalten wir wegen eventuellen Rundungsfehlern die Lösung $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Man kann nun zeigen, was hier nicht gemacht werden soll, dass $\hat{x}$ das Gleichungssystem $(A + E)\hat{x} = b$ löst, wobei sich der *Rückwärtsfehler* E durch

$$\frac{\|E\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq 3\varepsilon^* n + 5\varepsilon^* n \frac{\|L\|_\infty \|R\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \mathcal{O}(\varepsilon^{*2}) \tag{1}$$

mit der Maschinengenauigkeit ε^* abschätzen lässt. Beweisen Sie nun, dass für die LR-Zerlegung mit Pivotisierung immer

$$\|L\|_\infty \leq n \tag{2}$$

gilt. Zeigen Sie weiterhin, dass für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \text{ oder } j = n \\ -1, & \text{falls } i > j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

der Rückwärtsfehler E der LR-Zerlegung mit Pivotisierung

$$\frac{\|E\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq 3\varepsilon^* n + 5\varepsilon^* n 2^{n-1} + \mathcal{O}({\varepsilon^*}^2) \tag{4}$$

erfüllt.

Bemerkung: Das Beispiel (3) *für A und die Schärfe von* (1) *(muss hier auch nicht gezeigt werden) zeigt im Übrigen, dass die LR-Zerlegung mit Pivotisierung im Allgemeinen nicht (rückwärts-)stabil ist, wohingegen man beweisen kann, dass die QR-Zerlegung stets stabil ist.*