Technische Universität Berlin **Wintersemester 2018/2019**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

7. Übungsblatt: SVD

Hausaufgaben: (Abgabe <u>vor</u> der Vorlesung am 12. Dezember 2018)

Aufgabe 1: **(2 Punkte)**
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ beliebig. Beweisen Sie, dass der größte Singulärwert durch

$$\sigma_{\max}(A) = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\\ y\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}}} \frac{x^T A y}{\|x\|_2\|y\|_2}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2: **(3 Punkte)**
Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ existiert eine eindeutige Matrix $A^+ \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so dass:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (AA^+)^* = AA^+, \quad (A^+A)^* = A^+A$$

(Das soll nicht bewiesen werden.)
Sei nun $\mathbb{R}_*^{n\times m}$ die Menge aller $n \times m$-Matrizen von vollem Rang und $\varphi : \mathbb{R}_*^{n\times m} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ die Funktion, die eine Matrix von vollem Rang auf ihre Pseudoinverse abbildet. Zeige, dass φ stetig ist. Hinweis: Orthogonale Projektion.

Aufgabe 3: **(2 Punkte)**
Zeige, dass die Singulärwertzerlegung nicht eindeutig ist. Gib eine Matrix an, die nicht diagonalisierbar ist. Zu dieser Matrix, berechne die Singulärwertzerlegung.

Aufgabe 4: **(3 Punkte)**
In der Übung haben wir gesehen, dass zur Berechnung der PCA (principal component analysis) das Maximierungsproblem

$$\operatorname*{argmax}_{v\in\mathbb{R}^m, ||v||=1} v^T A A^T v$$

zu lösen ist, wobei wir annnehmen, dass $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vollen Rang habe und $m \leq n$ sei.
Wie kann ich dieses Problem mittels Singulïwertzerlegung lösen?
Hinweis:

$$\operatorname*{argmax}_{v\in\mathbb{R}^m, ||v||=1} f(Qv) = Q^T \operatorname*{argmax}_{w\in\mathbb{R}^m, ||w||=1} f(w)$$

gilt für jede orthogonale Matrix Q. Falls Sie dies verwenden, beweisen Sie es bitte auch.