Technische Universität Berlin **Wintersemester 2018/2019**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

8. Übungsblatt: Interpolation

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 19. Dezember 2018)

Aufgabe 1: **(2 Punkte)**

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit zwei QR-Zerlegungen $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$ gegeben.

1. Zeigen sie, dass, wenn A invertierbar ist, eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $d_{ii} \in \{1, -1\}$, $i = 1, \ldots, n$, existiert, sodass $Q_1 = Q_2D$ und $R_1 = DR_2$.
2. Zeigen sie, dass 1. nicht stimmen muss, falls A singulär ist.

Aufgabe 2: **(2 Punkte)**
Sei f eine n-mal differenzierbare Funktion, und die Stützstellen x_i paarweise verschieden. Der Interpolationsfehler $R(x) = f(x) - L(x)$ des Interpolationspolynoms L ist für $x_1 \leq x \leq x_n$ durch

$$R(x) = \frac{f^n(\xi)}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x - x_i), \quad x_1 < \xi < x_n$$

gegeben, falls die x_i aufsteigend geordnet sind.

Zeigen Sie, dass sich der Fehler der Interpolation an drei äquidistanten Stützstellen durch

$$R(x) \leq \frac{||f'''||_{\infty,[x_0,x_2]}}{27}\sqrt{3}h^3$$

abschätzen lässt, wobei h der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Stützstellen ist.

Aufgabe 3: **(3 Punkte)**
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die x_i alle voneinander verschieden und sei

$$q_i : x \mapsto \prod_{j\neq i}(x - x_j)^2$$

das Quadrat des nichtnormierten i-ten Lagrangepolynoms. Zeige, dass dann

$$g_i : x \mapsto \frac{q_i(x)}{q_i(x_i)}\left(\left(1 - (x - x_i)\frac{q_i'(x_i)}{q_i(x_i)}\right)f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i)\right)$$

die Funktion f und f' in x_i interpoliert, sowie an allen anderen x_j verschwindende Ableitung und Werte hat.

Aufgabe 4: **(3 Punkte)**

Sei $f = (f_0, ..., f_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ und

$$d_j = (\mathrm{DFT}(f))_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{n}\cdot i}$$

Wir nennen $d = (d_0, ..., d_{n-1})$ die Diskrete Fourier-Transformation (DFT) von f. Die Inverse DFT ist durch

$$(\mathrm{IDFT}(d))_j := \sum_{k=0}^{n-1} d_k e^{jk\frac{2\pi}{n}\cdot i} = f_j$$

definiert. Bezeichne mit $R : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : (\alpha_0, .., \alpha_{n-1}) \mapsto (\alpha_0, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}..., \alpha_1)$ den Operator, der die Reihenfolge der Stützstellen invertiert. Überprüfe, ob

$$\mathrm{DFT}^{-1} = \mathrm{IDFT} = n \cdot \mathrm{DFT} \circ R\,.$$