**Technische Universität Berlin** **Wintersemester 2018/2019**
**Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften**
**Institut für Mathematik**
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

# Numerische Mathematik I

## 11. Übungsblatt: DFT

**Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 30. Januar 2019)**

**Aufgabe 1:** **(4 Punkte)**
Sei $T_m$ das $m$-te Tschebyscheff-Polynom

$$T_0 : x \mapsto 1, \quad T_1 : x \mapsto x, \quad T_{n+1} : x \mapsto 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

was auf $[-1, 1]$ auch identisch zu

$$T_m : x \mapsto \cos(m \arccos x)$$

ist.
Zeige, dass für jedes Polynom $P$ von höchstens Grad $m$ gilt: Falls $|P(x)| < 1$ für alle $x \in [-1, 1]$, dann folgt $|T_m(y)| \geq |P(y)|$ für alle $|y| > 1$.

**Aufgabe 2:** **(3 Punkte)**
Zeige mit der Definition aus Aufgabe 1:

$$T_m\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^m + \frac{1}{z^m}\right).$$

**Aufgabe 3:** **(3 Punkte)**
Für das CG-Verfahren gilt die Konvergenzrate

$$||e_m||_A \leq \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^m ||e_0||_A$$

wobei $\kappa$ die Kondition der Matrix $A$ in der euklidischen Norm ist und $e_i := x_i - x^*$ der Fehler nach der $i$-ten Iteration. Sei nun die Kondition von $A$ in einem konkreten Fall $\kappa(A) = 9$ und $||e_0||_2 = 1$. Wie viele Iterationen benötigt das CG-Verfahren, um den Fehler in der euklidischen Norm unter die Rechnergenauigkeit zu bringen, wobei die verwendeten Gleitkommazahlen, die des Standard IEEE 754 64-bit sind?
Welcher Gesamtaufwand ergibt sich, wenn $A$ dünn/dicht besetzt ist? Dünn besetzt, bedeutet dass die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $O(n)$ Nichtnulleinträge hat.