Technische Universität Berlin **Wintersemester 2018/2019**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Reinhold Schneider, Benjamin Kutschan

Numerische Mathematik I

13. Übungsblatt: Das Allerletzte

Hausaufgaben: (Abgabe <u>vor</u> der Vorlesung am 13. Februar 2019)

Aufgabe 1: **(3 Punkte)**
Die Iterationsvorschrift des CG-Verfahrens zur Lösung von $\min \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ ist

$$x_{m+1} = x_m + \alpha d_m$$

mit der optimalen Schrittweite α.
Sei $x^* = A^{-1}b$ die exakte Lösung.
Sei weiterhin aus der Vorlesung bekannt, dass $x^* - x_{m+1}$ A-orthogonal auf d_m steht und die d_m eine Orthogonalbasis bezüglich des A-Skalarproduktes bilden. Beweise: $x^* - x_m$ ist A-orthogonal auf $d_0, d_1, ..., d_{m-1}$.

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**
Berechnen Sie die Richtungsableitung in Richtung v und den Gradienten der folgenden Funktionen:

1. $x \mapsto x^T Ax$
2. $x \mapsto \frac{x^T Ax}{x^T x}$
3. $x \mapsto x^T A^T Ax - b^T x$
4. $x \mapsto ||Ax - b||^2$
5. $\arctan(a^T(\arctan(Bx))$.

arctan soll hier elementweise auf den Vektors angewendet werden. A sei eine Matrix und a ein Vektor.

Aufgabe 3: **(2 Punkte)**

Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Folge der Iterierten eines Gradientenverfahrens mit optimaler Schrittweite angewandt auf die Funktion $x \mapsto \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ mit A symmetrisch positiv definit. Beweise oder widerlege:

1. $||x_{i+1} - A^{-1}b|| \leq ||x_i - A^{-1}b||$
2. $\frac{1}{2}x_{i+1}^T Ax_{i+1} - b^T x_{i+1} \leq \frac{1}{2}x_i^T Ax_i - b^T x_i$